COLLECTANEA MATHEMATICA

PUBBLICAZIONI DELL'ISTITUTO DI MATEMATICA

DELL'UNIVERSITÀ DI MILANO

N. 312

C. F. MANARA - P. C. NICOLA

Sui poliedri convessi

Estratto da "*Atti e Memorie dell'Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti di Modena*,, (6) 8 (1966), pp. 3-14

MILANO

1966

ACCADEMIA NAZIONALE DI SCIENZE LETTERE E ARTI
MODENA

C. F. MANARA - P. C. NICOLA

Sui poliedri convessi

SOCIETÀ TIPOGRAFICA EDITRICE MODENESE - MUCCHI
1966

Estratto dagli *Atti e Memorie della Accademia Nazionale di Scienze, Lettere e Arti di Modena,* Serie VI, Vol. VIII, 1966

C. F. MANARA - P. C. NICOLA

Sui poliedri convessi

1. - Scopo della presente nota è illustrare geometricamente certi teoremi fondamentali riguardanti gli insiemi convessi di punti, e di esporre alcuni procedimenti dimostrativi, che possono apparire come non immediatamente percepibili nei loro motivi e nelle loro direzioni se esposti soltanto col puro formalismo algebrico.

2. - Consideriamo lo spazio ad m dimensioni, S_m, $(m \geq 2)$, sul campo reale $\mathcal{R}$; siano

$$x_1, x_2, \ldots, x_m \qquad (x_i \in \mathcal{R})$$

le coordinate di un suo punto P.

Come è noto, considerati due punti P_1 e P_2 e posto

$$P_1 \equiv [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m}]$$
$$P_2 \equiv [x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2m}]$$

si chiama *segmento* di estremi P_1 e P_2 l'insieme dei punti P le cui coordinate sono date da

$$(1) \qquad x_i = \lambda_1 x_{1i} + \lambda_2 x_{2i} \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{R};\ i = 1, \ldots, m),$$

essendo i coefficienti λ_1, λ_2 sottoposti alle limitazioni

$$(2) \qquad \lambda_1 \geq 0 \quad , \quad \lambda_2 \geq 0 \quad , \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$$

In particolare, come abbiamo visto, si dice che i punti P_1, P_2 sono *estremi* del segmento; ad essi corrispondono, in base alle formule (1) e (2), le coppie di valori dei coefficienti

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 0 \ \text{e}\ \lambda_1 = 0 \quad , \quad \lambda_2 = 1$$

rispettivamente. Gli altri punti saranno detti *interni* al segmento.

Dati in S_m certi punti P_i $(i=1,\ldots,h)$ $(h>1)$, si definisce *combinazione lineare* dei punti P_i il punto P le cui coordinate sono

$$x_k = \sum_{i=1}^{h} c_i x_{ik} \qquad (k = 1, \ldots, m),$$

punto che simbolicamente indichiamo scrivendo

(3) $$P = \sum_{i=1}^{h} c_i P_i,$$

dove $c_1, \ldots, c_h$ sono numeri reali detti *coefficienti* della combinazione.

Se in particolare per questi coefficienti si ha

$$\sum_{i=1}^{h} c_i = 1 \quad , \quad c_i \geq 0 \qquad (i = 1, \ldots, m),$$

allora il punto indicato dalla (3) si dice ottenuto per *combinazione lineare convessa* dei punti $P_1, \ldots, P_h$.

Ciò premesso, ricordiamo che un insieme $\mathcal{F}$ di punti dello spazio ad *m* dimensioni si chiama *convesso* se contiene ogni punto del segmento di estremi P_1 e P_2 quando ne contiene gli estremi.

È del tutto chiaro che, considerata la retta come immagine del campo reale $\mathcal{R}$, il segmento di retta, cioè l'insieme di punti la cui coordinata ascissa x soddisfa a limitazioni del tipo

$$x_1 \leq x \leq x_2,$$

è un insieme convesso nel senso che abbiamo precisato. Da questo punto di vista si può dire che il segmento (nel senso elementare di questo termine) è l'insieme convesso elementare; e la definizione di insieme convesso generale si potrebbe considerare come una condizione che impone all'insieme stesso di contenere l'insieme convesso elementare (segmento) quando ne contiene gli estremi.

La nozione di segmento che abbiamo data, generalizza in maniera naturale la nozione elementare della figura che è designata con questo nome, quando appartiene al piano o allo spazio tridimensionale abituale.

È evidente che in S_m può essere introdotta una *topologia*, definendo per esempio come *intorno* (aperto) avente *centro* in P e *raggio* δ (con δ reale e positivo) l'insieme di tutti i punti

$$Q \equiv [y_1, y_2, \ldots, y_m]$$

tali che sia, per ogni indice i,

(4) $$x_i - y_i \mid < \delta.$$

Tale insieme può essere indicato con un simbolo che richiami il suo centro ed il suo raggio, per esempio col simbolo

$$\mathrm{Int}\,(P, \delta).$$

Allora, rispetto a questa topologia (e ad ogni altra topologia ad essa equivalente) si può definire il concetto di punto *interno* all'insieme $\mathcal{T}$, di punto *esterno* e di punto di *frontiera*.

Su queste basi si può ulteriormente precisare il concetto di insieme convesso, definendo come *strettamente convesso* un insieme $\mathcal{T}$ tale che per ogni segmento di estremi P_1 e P_2 non più di due punti (e precisamente gli estremi) appartengano alla frontiera di $\mathcal{T}$.

Una proprietà facilmente dimostrabile degli insiemi convessi è enunciata dal

Teorema. La intersezione di una famiglia di insiemi convessi è convessa.

Si consideri ora un *semispazio* di S_m, cioè il luogo dei punti che soddisfano ad una disequazione lineare del tipo

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \geq b, \tag{5}$$

dove $a_1,...,a_m,b$ sono dei numeri reali dati. Per comodità indichiamo con $f(P)$ il primo membro della disequazione (5), ponendo quindi

$$f(P) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i. \tag{6}$$

Si verifica immediatamente che l'insieme dei punti che soddisfano alla disequazione (6) è convesso: infatti se P_1 e P_2 soddisfano alla (6) allora si ha $f(P_1) \geq b$, $f(P_2) \geq b$. Inoltre, poichè $f(P)$ è una forma lineare, per ogni coppia di numeri reali λ, μ si ha sempre

$$f(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2).$$

Se in particolare è $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ si ottiene

$$f(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2) \geq \lambda b + \mu b = b.$$

Diremo che $f(P)=b$ rappresenta un *iperpiano estremale* o *supporto estremale* per un insieme $\mathcal{T}$ di S_m se avviene che:
(i) per ogni punto P di $\mathcal{T}$ è $f(P) \geq b$;
(ii) è $f(P)=b$ per (almeno) *m* punti di $\mathcal{T}$ che siano fra loro linearmente indipendenti.

Si osserva facilmente che se $f(P)=b$ è un supporto estremale di $\mathcal{T}$ allora detto $\mathcal{T}_1$ l'insieme dei punti tali che sia $f(P)=b$ non esiste un insieme $\mathcal{T}_2$, che contiene $\mathcal{T}_1$, per tutti i punti del quale sia ancora $f(P)=b$.

È importante precisare, per i nostri scopi, la nozione di *copertura convessa* di un insieme $\mathcal{T}$ di S_m, che si definisce come l'insieme di tutti i punti S_m ottenuti come combinazioni lineari convesse di punti appartenenti ad $\mathcal{T}$. Tale insieme viene abitualmente indicato col simbolo $[\mathcal{T}]$.

La definizione di copertura convessa di un insieme consente di definire immediatamente la nozione di *poliedro convesso* come la copertura convessa di un insieme *finito* $\mathcal{T}$ di S_m, dei cui punti P si dice che *generano* il poliedro convesso corrispondente.

Ai poliedri convessi si riferisce uno dei teoremi principali della teoria dei corpi convessi, che ci proponiamo di analizzare dettagliatamente in questa nota. Vale infatti il seguente fondamentale

Teorema La copertura convessa di un insieme $\mathcal{T}$ *finito* e non degenere (ossia non contenuto in un S_r $(r<m)$) di punti in S_m è la intersezione dei semispazi determinati dai suoi supporti estremali.

Geometricamente, per $m=2$ il teorema fondamentale appare del tutto intuitivo: invero dato un insieme *finito* di punti del piano, è evidente che si può assegnare un *poligono* che è il minimo tra tutti i poligoni convessi che hanno, sulla loro frontiera o nel loro interno, ogni punto dell'insieme. Pertanto la copertura convessa dell'insieme $\mathcal{T}$ risulta essere la intersezione di tutti i semipiani determinati dai lati del poligono.

Quando si considerano degli insiemi di punti in S_m, con $m>2$, il teorema precedente richiede una dimostrazione formale; intendiamo generalizzare allo spazio S_m un procedimento per la costruzione della copertura convessa di un insieme finito, che appare intuitivo in S_2.

L'idea direttiva della dimostrazione per il caso in cui sia $m=2$ è la seguente:

si consideri un fascio F di rette parallele fra di loro; fissato in S_2 un sistema di coordinate cartesiane (anche oblique) x,y sia

$$ax + by = \lambda$$

(essendo λ un parametro reale) l'equazione delle rette del fascio F. Posto

$$f(P) = f(x, y) = ax + by,$$

ogni retta del fascio F appare ovviamente come luogo dei punti del piano in cui la funzione f(P) assume un valore fisso; in particolare la equazione $f(P) = f(P_0)$ rappresenta la retta del fascio F che passa per il punto P_0. Il fatto che l'insieme $\mathcal{T}$ sia finito porta come conseguenza che l'insieme dei valori che la funzione f(P) assume nei punti dell'insieme $\mathcal{T}$ sia finito. Esisterà quindi un punto almeno nel quale la funzione stessa assume il valore minimo; per semplicità supponiamo anzitutto che tale punto sia unico e indichiamolo con P_1. Esisterà quindi una retta r_1 del fascio F passante per P_1; ovviamente tutti gli altri punti dell'insieme diversi da P_1 apparterranno ad uno solo dei due semipiani determinati dalla retta r_1. Stabiliamo allora un verso positivo di rotazione nel piano (per es. l'abituale verso antiorario) e facciamo ruotare la retta r_1 nella stella avente centro in P_1, fino a che si incontra il « primo » dei punti appartenenti ad $\mathcal{T}$ diverso da P_1. Il criterio per determinare quale sia la « prima » retta in questione che contiene un punto di $\mathcal{T}$ diverso da P_1 è dato dalle seguenti osservazioni: nel fascio di centro P_1 possiamo considerare una coordinata, per esempio la coordinata tangente o un'altra equivalente. Poichè l'insieme $\mathcal{T}$ è finito ed ogni suo punto diverso da P_1 determina una retta del fascio di centro P_1, vi sarà un numero finito di valori della coordinata che competono a rette congiungenti P_1 con punti di $\mathcal{T}$ diversi da P_1 stesso; ovviamente la retta che consideriamo può sempre essere scelta col criterio che sia quella alla quale corrisponde il valore minimo della coordinata.

Lasciamo ora cadere la ipotesi semplificatrice che la retta r_1 contenga un solo punto P_1 dell'insieme $\mathcal{T}$: scelto un altro fascio G di rette parallele fra loro, diverso dal fascio F, è allora possibile determinare univocamente un punto, da chiamarsi P_1, sulla retta r_1 del fascio F, come quello nel quale la funzione lineare, corrispondente al fascio G, assume il valore minimo tra quelli assunti nei punti dell'insieme $\mathcal{T}$ appartenenti alla retta r_1.

3. - Ciò che è stato scritto fin qui, con riferimento alla immagine geometrica, può essere tradotto formalmente con il procedimento che ora esporremo.

Consideriamo lo spazio affine S_2 e sia $\mathcal{T}$ un insieme di N punti $(N > 2)$ fra loro distinti

$$P_i \equiv [x_i, y_i] \qquad (i = 1, \ldots, N). \tag{7}$$

Supporremo che $\mathcal{T}$ non sia contenuto in un S_1, cioè che i punti (7) non siano fra loro allineati.

Indichiamo con

$$a_0, b_0, a_1, b_1$$

dei numeri reali tali che sia

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{8}$$

e poniamo, per comodità,

$$a_0\, x + a_0\, y = f_0\,(x, y) = f_0\,(P), \tag{9}$$

$$a_1\, x + b_1\, y = f_1\,(x, y) = f_1\,(P). \tag{10}$$

Osservazione In virtù della (8) non esistono due punti distinti P' e P'' per i quali si abbia contemporaneamente

$$f_0\,(P') = f_0\,(P'') \quad , \quad f_1\,(P') = f_1\,(P'').$$

Ci proponiamo di riassegnare ai punti (7) degli indici nel modo seguente: indichiamo con P_1 il punto tale che per ogni P appartenente ad $\mathcal{S}$ si abbia

$$f_1\,(P_1) \leq f_1\,(P)$$

e, se esistono dei punti P per i quali è $f_1(P_1) = f_1(P)$, si abbia

$$f_0\,(P_1) < f_0\,(P).$$

Formiamo ora le espressioni

$$\varphi_1\,(P) = \frac{f_0\,(P) - f_0\,(P_1)}{f_1\,(P) - f_1\,(P_1)}\,, \tag{11}$$

$$\psi_1\,(P) = \frac{1}{f_1\,(P) - f_1\,(P_1)}\,, \tag{12}$$

definite ovviamente solo per i punti di $\mathcal{S}$ che rendono il denominatore diverso da zero.

Si dimostra immediatamente la validità del seguente lemma, che discende dalla (8):

Lemma 1 Non esistono due punti distinti fra loro, P_r e P_s, appartenenti ad $\mathcal{S}$, per i quali si abbia contemporaneamente

$$\varphi_1\,(P_r) = \varphi_1\,(P_s) \quad ; \quad \psi_1\,(P_r) = \psi_1\,(P_s).$$

Indichiamo ora con P_2 il punto dell'insieme $\mathcal{S}$, diverso di P_1, tale che sia

$$\varphi_1\,(P_2) \leq \varphi_1\,(P)$$

e, se esistono dei punti in corrispondenza ai quali si ha $\varphi_1\,(P_2) = \varphi_1\,(P)$, si abbia

$$\psi_1\,(P_2) < \psi_1\,(P)\,;$$

definito in questo modo univocamente il punto P_2 poniamo

$$f_2\,(P) = [\varphi_1\,(P) - \varphi_1\,(P_2)]\,[f_1\,(P) - f_1\,(P_1)]\,[f_1\,(P_2) - f_1\,(P_1)]. \tag{13}$$

Vale allora il

Teorema Per ogni punto P appartenente ad $\mathcal{T}$ si ha

$$f_2(P) \geq 0.$$

Dimostrazione. Innanzitutto si verifica che nella formula (13) si ha $f_2(P_1) = f_2(P_2) = 0$; inoltre per la definizione data del punto P_2 e per la definizione del punto P_1 si ottiene

$$f_1(P_2) > f_1(P_1).$$

Allora per ogni P appartenente ad $\mathcal{T}$ tale che sia $f_2(P) \neq 0$ si deduce che è $f_2(P) > 0$. Perciò la equazione

$$f_2(P) = 0 \tag{14}$$

rappresenta un supporto estremale per l'insieme $\mathcal{T}$.

In generale, per ogni intero $k > 1$ definiamo per ricorrenza

$$f_{k+1}(P) = [\varphi_k(P) - \varphi_k(P_{k+1})]\,[f_k(P) - f_k(P_k)]\,[f_k(P_{k+1}) - f_k(P_k)], \tag{15}$$

$$\varphi_{k+1}(P) = \frac{f_k(P) - f_k(P_{k+1})}{f_{k+1}(P) - f_{k+1}(P_{k+1})}, \tag{16}$$

$$\psi_{k+1}(P) = \frac{1}{f_{k+1}(P) - f_{k+1}(P_{k+1})}. \tag{17}$$

Allora sussiste il

Lemma 2 Per punti di $\mathcal{T}$ che rendono diverso da zero il denominatore delle (16) e (17) non esistono due punti fra loro distinti, P_r e P_s, tali che si abbia contemporaneamente

$$\varphi_{k+1}(P_r) = \varphi_{k+1}(P_s),$$

$$\psi_{k+1}(P_r) = \psi_{k+1}(P_s).$$

Chiamiamo P_{k+2} il punto dell'insieme $\mathcal{T}$ tale che, per ogni altro punto di $\mathcal{T}$, si abbia

$$\varphi_{k+1}(P_{k+2}) \leq \varphi_{k+1}(P),$$

e se esistono dei punti per i quali è $\varphi_{k+1}(P_{k+2}) = \varphi_{k+1}(P)$ si abbia

$$\psi_{k+1}(P_{k+2}) < \psi_{k+1}(P),$$

per ogni intero k non negativo. Allora, in modo formalmente analogo a quello seguito per dimostrare il teorema 1, le considerazioni precedenti permettono di enunciare il seguente

Teorema 2 Per ogni punto P dell'insieme $\mathcal{T}$ si ha

$$f_k(P) \geq 0 \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

Si noti ora che per ipotesi l'insieme $\mathcal{T}$ è finito; dunque l'insieme dei supporti estremali di $\mathcal{T}$ è finito. Segue da ciò che l'indice k che appare nell'enunciato del teorema 2 assume soltanto un numero finito di valori distinti e pertanto da questo teorema discende immediatamente il teorema enunciato all'inizio.

4. - Estenderemo ora la dimostrazione ad un insieme di punti appartenente ad uno spazio di dimensione m qualsiasi, operando per induzione rispetto ai valori di m. L'idea direttiva della dimostrazione può essere brevemente esposta con riferimento al caso in cui è $m = 3$, cioè al caso di un insieme di punti appartenente allo spazio ordinario tridimensionale. Si consideri un fascio F di piani paralleli tra loro, e si supponga che esso sia stato scelto in modo che nessuno dei piani del fascio sia parallelo ad alcuna tra le rette (in numero finito) che congiungono fra loro a coppie i punti di $\mathcal{T}$, nè ad alcuno dei piani determinati da terne di punti di $\mathcal{T}$ stesso.

Fissato nello spazio tridimensionale un sistema di coordinate cartesiane x,y,z e posto

$$ax + by + cz = f(P),$$

sarà $f(P) = \text{cost.}$ la equazione di un piano qualunque del fascio F. I valori che la funzione $f(P)$ assume nell'insieme finito $\mathcal{T}$ sono in numero finito e quindi esiste un punto dell'insieme nel quale $f(P)$ assume il suo valore minimo. Per la ipotesi fatta tale punto è unico; chiamiamolo P_1. Tutti i punti dell'insieme diversi da P_1 staranno in uno dei due semispazi determinati dal piano di equazione

$$f(P) = f(P_1). \tag{18}$$

Consideriamo ora la stella di rette avente centro in P_1; proiettando da questo punto gli altri punti dell'insieme $\mathcal{T}$ si ottiene un insieme finito di rette, che possono sempre essere considerate come punti di uno spazio affine Σ_2 a due dimensioni. Ciò è reso evidente per esempio intersecando ogni retta della stella di centro P_1 con un piano parallelo al piano (18). Pertanto, per il teorema dimostrato nel caso in cui è $m = 2$, si avrà un numero finito di supporti estremali, che sono piani della stella di centro P_1.

Sia π uno di tali piani; allora tutti i punti dell'insieme stanno in uno dei due semispazi determinati da π. Sul piano π staranno certi punti di $\mathcal{T}$, costituenti un insieme finito $\mathcal{T}(\pi)$. Possiamo sempre supporre che il piano π non sia parallelo ad alcuno tra gli assi coordinati; pertanto possiamo sempre immaginare di proiettare l'insieme $\mathcal{T}(\pi)$ dal punto improprio di un asse sul piano coordinato opposto. Otterremo così un insieme finito $\mathcal{T}^*$ di punti appartenenti ad uno spazio a due dimensioni: per il teorema già dimostrato esisterà un numero finito di iperpiani estremali (rette in questo caso) per l'insieme $\mathcal{T}^*$. Sia α uno di questi iperpiani. Ora si osservi che la equazione che rappresenta α nel piano a cui appartiene l'insieme $\mathcal{T}^*$ può anche essere considerata come la equazione che rappresenta nello spazio un piano che è parallelo alla direzione dalla quale l'insieme $\mathcal{T}(\pi)$ è stato proiettato in $\mathcal{T}^*$ e passa per la retta α considerata. Questo piano, insieme con il piano π sul quale sta il sottoinsieme $\mathcal{T}(\pi)$, determina un fascio di piani avente per asse una retta g; facendo ora ruotare il piano π attorno alla retta g in un verso determinato, si incontrerà un « primo » piano ω che contiene un punto dell'insieme $\mathcal{T}$ diverso da quelli che stanno sulla retta g. Questo piano ω è ovviamente un piano estremale per l'insieme $\mathcal{T}$ e contiene un sottoinsieme $\mathcal{T}(\omega)$ contenuto in $\mathcal{T}$: proiettando $\mathcal{T}(\omega)$ in modo analogo a quello che è stato fatto per il sottoinsieme $\mathcal{T}(\pi)$ si potrà di nuovo individuare un altro piano estremale, e così via. Poichè l'insieme $\mathcal{T}$ è finito, appare chiaro che il procedimento avrà fine dopo un numero finito di operazioni e porterà a determinare tutti i piani estremali di $\mathcal{T}$.

Per quanto riguarda la determinazione del piano ω, appartenente al fascio avente come sostegno la retta g, si può svolgere qui un ragionamento analogo ad uno già svolto in precedenza: invero si può fissare nel fascio avente come sostegno la retta g una coordinata; poichè ogni punto dell'insieme $\mathcal{T}$, diverso da quelli che stanno su g, determina univocamente un piano del fascio, esso determina univocamente anche un valore della coordinata. Poichè $\mathcal{T}$ è finito, saranno in numero finito anche i valori della coordinata così determinati. Pertanto possiamo scegliere come piano ω quello a cui compete il valore minimo della coordinata.

5. - Dopo avere illustrato con riferimento ad S_3 le idee geometriche che suggeriscono la dimostrazione per induzione rispetto alla dimensione m dello spazio, possiamo passare alla traduzione formale dei procedimenti descritti, per un m positivo qualsiasi.

Sia $\mathcal{S}$ un insieme finito di punti in S_m e indichiamo con

$$P \equiv [x_1, x_2, \ldots, x_m]$$

un punto generico di $\mathcal{S}$. Osserviamo innanzitutto che le proprietà di S_m qui considerate sono invarianti rispetto a trasformazioni affini aventi determinante positivo. Pertanto si può sempre supporre di avere eseguito una trasformazione affine tale che nessuno degli spazi S_{k-1} $(k < m)$, determinati da k punti linearmente indipendenti appartenenti ad $\mathcal{S}$, sia parallelo ad alcuno degli assi coordinati. Poichè $\mathcal{S}$ è finito, si possono scegliere dei numeri reali

$$a_1, a_2, \ldots, a_m$$

tali che ogni iperpiano della famiglia rappresentata dalla relazione

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = a_0 \tag{19}$$

contenga, al variare di a_0, al più un solo punto di $\mathcal{S}$. Poniamo, per brevità,

$$f(P) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$$

e scriviamo la (19) nella forma $f(P) = a_0$.

Indichiamo ora con P_1 il punto, unico per ipotesi, in corrispondenza al quale $f(P)$ assume, in $\mathcal{S}$, il suo valore minimo e poniamo

$$\bar{f}(P) = f(P) - f(P_1); \tag{20}$$

allora è $\bar{f}(P) \geq 0$ per ogni P appartenente ad $\mathcal{S}$.

Indichiamo poi con

$$g_i(P) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m-1)$$

le equazioni di certi $(m-1)$ iperpiani passanti per P_1 e tali che la famiglia di iperpiani

$$\bar{f}(P) = 0 \quad , \quad g_i(P) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, m-1)$$

formi una *base* per la stella di iperpiani avente in P_1 il suo centro.

Per ogni punto P appartenente ad $\mathcal{S}$ che sia diverso da P_1 poniamo

$$y_i(P) = \frac{g_i(P)}{\bar{f}(P)} \qquad (i = 1, \ldots, m-1) \tag{21}$$

e indichiamo con S_{m-1} lo spazio affine dei punti aventi come coordinate $y_1, \dots, y_{m-1}$.

Pertanto ad ogni punto appartenente ad $\mathcal{T}$ che sia diverso da P_1 corrisponde un punto appartenente ad un certo insieme

$$\mathcal{E}$$

di uno spazio S_{m-1} ad $(m-1)$ dimensioni.

Supponiamo che il teorema fondamentale valga per S_{m-1}; segue da ciò, per ipotesi. che esiste almeno un supporto estremale di $\mathcal{E}$. Indichiamo con

$$\sum_{i=1}^{m-1} c_i\, y_i = c_0$$

la equazione ad esso relativa. Discende da ciò che la equazione

$$\sum_{i=1}^{m-1} c_i\, g_i - c_0\, \bar{f} = 0 \tag{22}$$

rappresenta un supporto estremale, contenente il punto P_1, nello spazio S_m. Pertanto la (22) è soddisfatta da almeno *m* punti di $\mathcal{T}$.

Consideriamo ora la equazione nelle variabili x_i che si ottiene sostituendo nella (22), al posto di g_i e di $\bar{f}$, le espressioni date dalle formule (20) e (21). Tale equazione avrà la forma

$$\sum_{i=1}^{m} d_i\, x_i + d_0 = 0. \tag{23}$$

Nella (23), in base alle osservazioni fatte, possiamo sempre supporre che tutti i numeri d_i $(i=1,\dots,m)$ siano diversi da zero. I punti dell'insieme $\mathcal{T}$ appartenenti all'iperpiano di equazione (23) formano un insieme $\mathcal{T}_1$ che appartiene ovviamente ad uno spazio S_{m-1} ad $(m-1)$ dimensioni; invero, dalla osservazione fatta si trae che è sempre possibile ricavare la coordinata x_m di un punto appartenente ad $\mathcal{T}_1$ in funzione delle prime $(m-1)$ coordinate, risolvendo la (23) nella forma

$$x_m = \Big(- d_0 - \sum_{i=1}^{m-1} d_i\, x_i\Big) \Big/ d_m.$$

Pertanto è possibile proiettare i punti appartenenti all'insieme $\mathcal{T}_1$ sull'iperpiano formato dai primi (m—1) assi coordinati; si ottiene un insieme $\mathcal{T}_1^*$ appartenente all'iperpiano di equazione

$$x_m = 0.$$

Sia $F(P) = 0$ la equazione di un supporto estremale per l'insieme $\mathcal{T}_1^*$, iperpiano esistente per ipotesi, e definiamo per ogni punto appartenente ad $\mathcal{T}$, che *non* appartenga anche ad $\mathcal{T}_1$, la funzione

$$G(P) = \frac{F(P)}{\sum_{i=1}^{m} d_i x_i + d_0};$$

sia $\overline{G}$ il valore minimo che $G(P)$ assume e poniamo, per ogni punto di $\mathcal{T}$,

$$\varphi(P) = F(P) - \left[\sum_{i=1}^{m} d_i x_i + d_0\right] \overline{G}. \tag{24}$$

Si verifica che per ogni punto di $\mathcal{T}$ si ha $\varphi(P) \geq 0$, poichè la espressione $\sum_i d_i x_i + d_0$ è positiva per ogni punto di $\mathcal{T}$ che non appartiene anche ad $\mathcal{T}_1$; dunque

$$\varphi(P) = 0$$

rappresenta un supporto estremale di $\mathcal{T}$, diverso dal supporto estremale (22). Procedendo in maniera analoga a quella ora esposta si possono generare tutti i supporti estremali di $\mathcal{T}$, i quali sono in numero finito poichè $\mathcal{T}$ è un insieme finito. Si ha quindi il

Teorema 3 Se il teorema fondamentale vale in S_{m-1} $(m>2)$ allora esso è valido anche in S_m. Poichè il teorema vale in S_2 esso vale per qualsiasi S_m, dove *m* è un intero positivo qualsiasi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

FENCHEL, W., *Convex Cones, Sets and Functions*, Princeton, 1953.

GALE, D., *The Theory of Linear Economic Models*, New York, 1960, cap. 2.

KOOPMANS, T.C., (coordinatore), *Activity Analysis of Production and Allocation*, New York, 1951, capp. 17-18.

KUHN, H.W., TUCKER, A.W., (coordinatori), *Linear Inequalities and Related Systems*, articoli 2, 3, 5.

REIDEMEISTER, K., *Topologie der polyeder*, Lipsia, 1938, cap. 1, par. 4-4.

WEYL, H., *The Elementary Theory of Convex Polyedra*, in KUHN, H.W., TUCKER, A.W., (coordinatori), *Contributions to the Theory of Games*, Princeton, 1950.

COLLECTANEA MATHEMATICA

Pubblicazioni dell'Istituto di Matematica dell'Università di Milano

236 — **D. Roux** — Sulle orientazioni di più forte accrescimento delle funzioni intere di ordine finito e tipo medio. I. Ordine $\rho = 1/q$ (q intero positivo). *Riv. di Matem. Univ. Parma* (1962).

237 — **E. Bombieri** — Sulle formule di A. Selberg generalizzate per classi di funzioni aritmetiche e le applicazioni al problema del resto nel «Primzahlsatz». *Riv. di Matem. Univ. Parma* (1962).

238 — **E. Tonti** — Le forze apparenti della meccanica classica in relatività generale. *Rend. Ist. Lomb.* (1962).

239 — **L. Gotusso** — Sulle funzioni convesse e su una estensione del teorema di Cavalieri-Lagrange *Period. di Mat.* (1962).

240 — **M. Pastori** — Angelo Tonolo (Necrologio). *Boll. U.M.I.* (1962).

241 — **M. Pastori** — Intervento dopo la conferenza del prof. Lichnerowicz. *Atti 2ª Riunione Groupement Mathém. Expr. latine Firenze 26-30 settembre, Bologna 1-3 ottobre 1961* (1963).

242 — **E. Bombieri** — Alcune osservazioni sul prodotto di n forme lineari reali non omogenee. *Ann. di Matem. pura e appl.* (1963).

243 — **D. Roux** — Sulla composizione secondo Hurwitz-Pincherle di due serie di potenze generalizzate. *Ann. di Matem. pura e appl.* (1963).

244 — **D. Roux** — Un teorema inverso sopra la composizione secondo Hurwitz-Pincherle. *Boll. U.M.I.* (1963).

245 — **D. Roux** — Sulla composizione secondo Hurwitz-Pincherle di due serie di Dirichlet. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

246 — **C. F. Manara** — Un elegante teorema sugli ovali. *Period. di Matem.* (1963).

247 — **M. Dedò** — Una verifica analitica diretta del teorema di Salmon. *Period. di Matem.* (1963).

248 — **M. Pastori** — Equilibrio e congruenza nei sistemi continui. Aspetto formale e geometrico. Aspetto energetico ed estensioni. *Semin. di Matem. dell'Univ. di Bari* (1963).

249 — **D. Roux** — Su una classe di funzioni intere con il minimo modulo quasi-asintotico al massimo modulo. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963)

250 — **E. Bombieri** — Sul teorema di "Tschebotarev,,. *Acta Arithmetica* (1963).

251 — **C. F. Manara** — Il computo degli zeri di una funzione. *Period. di Matem.* (1963).

252 — **M. Dedò** — I calcolatori prodigio. *Period. di Matem.* (1963).

253 — **M. Dedò** — Un elegante teorema sugli ovali. *Period. di Matem.* (1963).

254 — **C. F. Manara** — Successioni ed equazioni alle differenze finite. *Period. di Matem.* (1963).

255 — **P. Giudici** — Il tema di concorso per i licei. *Period. di Matem.* (1963).

256 — **M. Spoglianti** — Recensione "Ugo Cassina, Critica dei principi della matematica e questioni di logica. Ed. Cremonese, Roma, 1961,,. *Archimede* (1963).

257 — **E. Udeschini Brinis** — Sul divario fra due campi cinetici. *Rend. Ist. Lomb.* (1963)

258 — **E. Udeschini Brinis** — Sui sistemi meccanici dinamicamente equivalenti. *Rend. Ist. Lomb.* (1963).

259 — **F. Skof** — Sull'andamento delle somme parziali delle serie di potenze con integrale assolutamente convergente. *Boll. U.M.I.* (1963).

260 — **E. Bombieri** — Sull'analogo della formula di Selberg nei corpi di funzioni. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

261 — **M. Pastori** — Sulla curvatura della "direttissima,, nel principio di Hertz. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

262 — **E. Udeschini Brinis** — Sul significato delle caratteristiche cinetiche e delle equazioni del Maggi per sistemi anolonomi. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

263 — **F. Graiff** — Sull'uso di coordinate armoniche in relatività generale. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

264 — **G. Ricci** — Sul teorema di Carathéodory-Bohr-Banach riguardante la copertura secondo Vitali. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

265 — **L. Cupello** — Sulle costanti delle condizioni di Hölder in forma integrale. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

266 — **N. M. Ferlan** — Sul minimo modulo delle funzioni analitiche. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

267 — **F. Skof** — Sull'attenuazione delle condizioni tauberiane. *Rend. Acc. Naz. Lincei* (1963).

(segue a pag. 3 della copertina)

ISTITUTO MATEMATICO DELL'UNIVERSITÀ, VIA C. SALDINI 50, MILANO (ITALIA)

ACHILLEA - MILANO